b) pour x>0

$\frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{-1}{2(1+c^2)}$

lorsque $x \to 0^+$

$c \to 0^+$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{c\to 0^+} \frac{-1}{2(1+c^2)} = -\frac{1}{2}$

d'où h est dérivable à droite en 0 et $h'_d(0) = -\frac{1}{2}$

c) $h'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)} < 0$

x	0	$+\infty$
h '(x)	-	
h(x)	$\frac{\pi}{4}$ ↘	0

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{1}{2} g(1) = 0$

3) $h(x)=x \Leftrightarrow h(x)-x=0$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\psi(x)=h(x)-x$

$\psi'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)} - 1 < 0$

$\psi(0) = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) - x = -\infty$

ψ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$\psi(\mathbb{R}_+) = \left]-\infty, \frac{\pi}{4}\right]$

comme $0 \in \psi(\mathbb{R}_+)$

alors il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$

tq $\psi(\alpha)=0$

$\psi(0) = \frac{\pi}{4}$

$\psi(1) = \frac{1}{2} g(\sqrt{2}) - 1 = \frac{\pi}{8} - 1$

$\psi(0) \times \psi(1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$

b) $|h'(x)| = \frac{1}{2(1+x^2)}$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2(1+x^2)} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

4) $\begin{cases} V_0 \in \mathbb{R}_+ / \{\alpha\} \\ V_{n+1} = h(V_n) \end{cases}$

a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

α et $V_n \in \mathbb{R}_+$

d'aprés le théorème des inégalités

des accroissements finis :

$|h(V_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|V_n - \alpha|$

$\Rightarrow |V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|V_n - \alpha|$

b) $|V_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|V_0 - \alpha|$

$|V_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|V_1 - \alpha|$

$|V_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|V_2 - \alpha|$

.....

.....

$|V_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|V_{n-1} - \alpha|$

multiplions membre à membre et simplifions on aura:

$|V_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |V_0 - \alpha|$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n |V_0 - \alpha| = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} (V_n - \alpha) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = \alpha$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn